目次

問題編

解答編

★がついた問題は高難易度の問題なので、分からなければすぐ解説を見ましょう。
※ 10 章の行列は、電験二種において他の章に比べて出題頻度が低いので後回しでも OK です。

01 ベクトルの表し方

ベクトルの表し方

ベクトルには様々な表し方がある。右図のような、大きさが A である $\dot{A}$ というベクトルは

① 実部と虚部に分けて表す**直交座標表示**の場合

$$\dot{A}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{jb}$$

② sin と cos を使って表す**三角関数表示**の場合

$$\dot{A}=\boldsymbol{A}(\mathbf{cos}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{j}\mathbf{sin}\boldsymbol{\theta})$$
$$=\boldsymbol{A}\mathbf{cos}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{jA}\mathbf{sin}\boldsymbol{\theta}$$

③ 偏角とベクトルの大きさを使って表す

フェーザ（極座標）表示の場合　※ 1

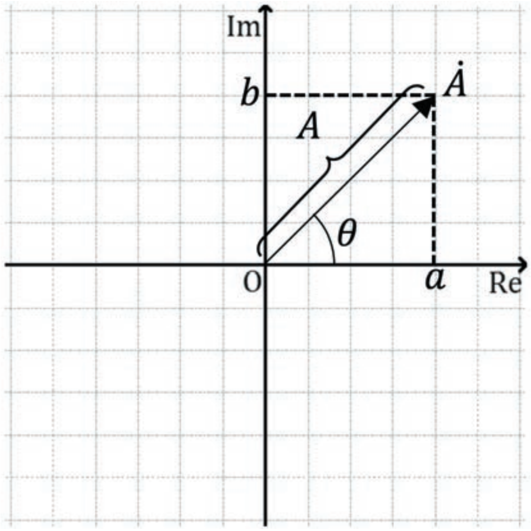
$$\dot{A}=\boldsymbol{A}\angle\boldsymbol{\theta}$$

④ 偏角とベクトルの大きさを使って表す

指数関数表示の場合

$$\dot{A}=\boldsymbol{A}\mathbf{e}^{j\theta}$$

と表すことができる。



※ 1　数学界では極座標表示、電気界ではフェーザ表示とよばれている。

フェーザ表示から直交座標表示への変換

下の式のように、フェーザ表示から直交座標表示に変換することができる。

$$\boldsymbol{A}\angle\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{A}\mathbf{cos}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{jA}\mathbf{sin}\boldsymbol{\theta}$$

※以降の問題では度数法と弧度法が混在しているので注意して解くこと。

例題

次のベクトルを直交座標表示で表せ。

(1) $\dot{A}=A\angle 30°$

$$=A\cos 30°+jA\sin 30°$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}A+j\frac{1}{2}A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (答)$$

(2) $\dot{A}=10\angle 60°$

$$=10\cos 60°+j10\sin 60°$$
$$=10\times\frac{1}{2}+j10\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=5+j5\sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (答)$$

1.　次のベクトルを直交座標表示で表せ。

(1) $\dot{Z}=Z\angle 45°$

(2) $\dot{E}_s=100\angle 30°$

(3) $\dot{I} = I\angle\theta$

(4) $\dot{E}_c = E_c\angle -\frac{4}{3}\pi$

指数関数表示から直交座標表示への変換

下の式のように、指数関数表示から直交座標表示に変換することができる。

$$\boldsymbol{A\mathrm{e}^{j\theta} = A\cos\theta + jA\sin\theta}$$

例題

次のベクトルを直交座標表示で表せ。

(1) $\dot{A} = A\mathrm{e}^{j\frac{2}{3}\pi}$

$$= A\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + jA\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= A\times\left(-\frac{1}{2}\right) + jA\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}A + j\frac{\sqrt{3}}{2}A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

(2) $\dot{A} = 50\mathrm{e}^{j180°}$

$$= 50\cos180° + j50\sin180°$$

$$= 50\times(-1) + j50\times 0$$

$$= -50 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

2.　次のベクトルを直交座標表示で表せ。

(1) $\dot{Z} = Z\mathrm{e}^{j30°}$

(2) $\dot{E}_s = 60\mathrm{e}^{j60°}$

(3) $\dot{I} = I\mathrm{e}^{j\theta}$

(4) $\dot{E}_b = E_b\mathrm{e}^{j\frac{4}{3}\pi}$

フェーザ表示の積と商

フェーザ表示の積と商は、以下の式のように簡単に計算できる。

$$A\angle\theta_1 \times B\angle\theta_2 = AB\angle(\theta_1+\theta_2)$$
$$A\angle\theta_1 \div B\angle\theta_2 = \frac{A}{B}\angle(\theta_1-\theta_2)$$

例題

次の計算をして、直交座標表示で表せ。

(1)　$20\angle 30° \times 5\angle 60°$

$= 20\times 5\angle(30°+60°)$

$= 100\angle 90°$

$= 100\cos 90° + j100\sin 90°$

$= 100\times 0 + j100\times 1$

$= j100$　…………(答)

(2)　$10\angle 30° \div 8\angle 60°$

$= 10\div 8\angle(30°-60°)$

$= \frac{5}{4}\angle(-30°)$

$= \frac{5}{4}\cos(-30°) + j\frac{5}{4}\sin(-30°)$

$= \frac{5}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{5}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{5\sqrt{3}}{8} - j\frac{5}{8}$　…………(答)

3.　次の計算をして、直交座標表示で表せ。

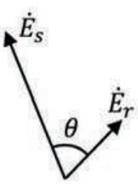
(1)　$3\angle 30° \times 4\angle 90°$

(2)　$10\angle 90° \div 5\angle 60°$

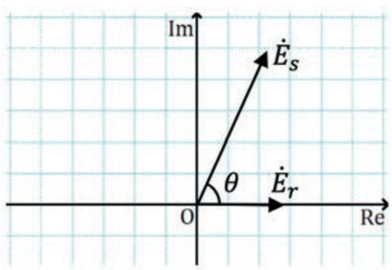
基準ベクトル

ベクトル同士の関係性を知りたいとき、どれか一つのベクトルを**基準ベクトル**として考えることで、他のベクトルを基準ベクトルを用いた式で表すことができる。

複素平面の真右を向くように**基準ベクトル**を設定する。



$\dot{E}_r$を基準ベクトルとする。



$|\dot{E}_r| = E_r$
$|\dot{E}_s| = E_s$

$\dot{E}_s$ は $\dot{E}_r$ より θ 進んでいることをベクトル図に表したが、ベクトルを直交座標表示にできない。

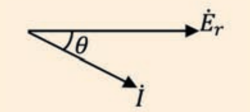
$\dot{E}_r$ を基準ベクトルとしたことで、$\dot{E}_s = E_s\cos\theta + jE_s\sin\theta$ と表せる。また、$\dot{E}_r$ は基準ベクトルで虚数成分を持たないので $\dot{E}_r = E_r$ と表せる。

例題

次の問いに答えよ。

(1) $\dot{I}$ を直交座標表示で表せ。

ただし、$\dot{E}_r$ を基準ベクトルとする。

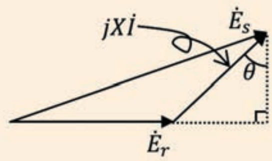


$\dot{I} = I\cos(-\theta) + jI\sin(-\theta)$ …………(答)

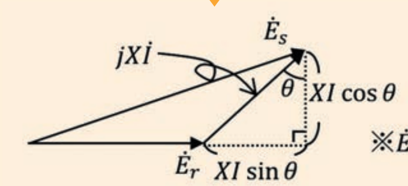
($\dot{I} = I\cos\theta - jI\sin\theta$ でもよい)

(2) $\dot{E}_s$ を直交座標表示で表せ。

ただし、$\dot{E}_r$ を基準ベクトルとする。



ベクトル図より $\dot{E}_s = \dot{E}_r + jX\dot{I}$



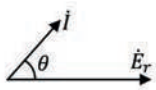
※$\dot{E}_r = E_r$

$\dot{E}_s = E_r + XI\sin\theta + jXI\cos\theta$ …………(答)

4. 次の問いに答えよ。

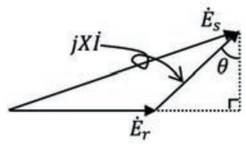
(1) $\dot{I}$ を直交座標表示で表せ。

ただし、$\dot{E}_r$ を基準ベクトルとする。



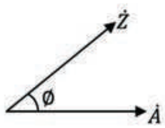
(2) $\dot{E}_s$ を直交座標表示で表せ。

ただし、$\dot{E}_r$ を基準ベクトルとする。



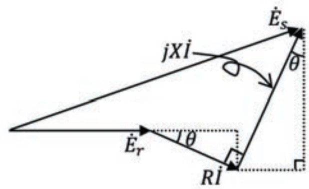
(3) $\dot{Z}$ を直交座標表示で表せ。

ただし、$\dot{A}$ を基準ベクトルとする。



★ (4) $\dot{E}_s$ を直交座標表示で表せ。

ただし、$\dot{E}_r$ を基準ベクトルとする。



02 対数

対数

$x = a^y$ という式において、「y は底を a とする x の対数」とよばれ、$\boldsymbol{y = \log_{a} x}$ と表される。

底

y は x が a の何乗にあたるかを示している。

電験二種では、底の a の部分は 10 もしくは**ネイピア数** $\mathrm{e} = 2.718\ldots$ を用いることがほとんどなので その 2 パターンに慣れておくとよい。また、参考書によっては「底が e の $\log_{\mathrm{e}}$ ○」を「ln ○」と略す表記もあるので これも覚えておこう。

$$\log_{10} 0.001 = -3$$
$$\log_{10} 0.01 = -2$$
$$\log_{10} 0.1 = -1$$
$$\log_{10} 1 = 0$$
$$\log_{10} 10 = 1$$
$$\log_{10} 100 = 2$$
$$\log_{10} 1000 = 3$$
$$\log_{\mathrm{e}} \mathrm{e} = 1$$
$$\log_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{A} = A$$

※以降の問題では log の扱いに慣れるため、底が 10 や e 以外の問題も出題する。

例題

次の値を求めよ。

(1) $\log_{2} 16$

$= 4$ …………(答)

$2^4 = 16$

(2) $\log_{5} \sqrt{5}$

$= \dfrac{1}{2}$ もしくは 0.5 …………(答)

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

(3) $\log_{10} 1000$

$= 3$ …………(答)

$10^3 = 1000$

(4) $\log_{\mathrm{e}} 1$

$= 0$ …………(答)

何かの 0 乗は必ず 1 となる。

1. 次の値を求めよ。

(1) $\log_{4} 64$

(2) $\log_{3} 81$

(3) $\log_{2} 64$

(4) $\log_{10} 10000$

(5) $\log_{10} 0.01$

(6) $\log_{10} 1$

(7) $\log_{10} \sqrt{10}$

(8) $\log_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{t}$

積の対数と商の対数

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$
$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

例題

次の値を求めよ。

(1) $\log_2 \frac{4}{3} - \log_2 \frac{1}{24}$

$= \log_2 \left(\frac{4}{3} \div \frac{1}{24}\right)$

$= \log_2 32$

$= 5$ …………(答)

(2) $\log_2 2\sqrt{2}$

$= \log_2 2 + \log_2 \sqrt{2}$

$= 1 + \frac{1}{2}$

$= 1.5$ もしくは $\frac{3}{2}$ …………(答)

2.　次の値を求めよ。

(1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 50$

(2) $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{3}{8}$

(3) $\log_6 2 - \log_6 \frac{1}{3}$

(4) $\log_8 32 - \log_8 \frac{1}{2}$

(5) $\log_{10} 100\sqrt{10}$

★(6) $\log_4 32$

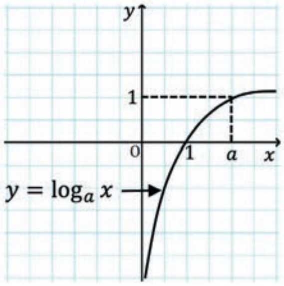
03 対数のグラフ

対数のグラフ

$y = \log_a x$ は $x = 1$ のとき $y = 0$, $x = a$ のとき $y = 1$

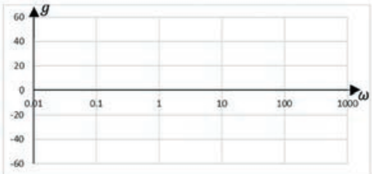
となり、右図のようなグラフとなる。

グラフの形を覚えておこう。



ボード線図

電験二種 2 次試験の機械制御科目では、ゲインの特性を示すときには下図のようなボード線図を用いる。



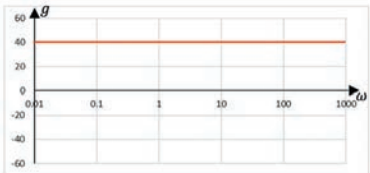
ゲインを表す g[dB] は角周波数 ω[rad/s] を使った $\boldsymbol{g = 20\log_{10}}$ ○ の形が基本形となり、これをボード線図に書くときは、**比例要素、微分要素、積分要素、一次進み要素、一次遅れ要素**の 5 つの要素を組み合わせることでスムーズに書くことができる。

比例要素

比例要素はゲイン g が ω に影響せず一定である要素のことで、ゲインが一定となる。

そのため、ボード線図は $\boldsymbol{\omega}$ **方向に一直線になる**特徴がある。

例えば $g = 20\log_{10} 100$ の場合、$g = 20 \times 2 = 40$ となり、下図のようなグラフになる。



例題

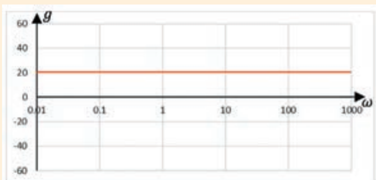
次のゲイン特性をボード線図に表せ。

(1) $g = 20\log_{10} 0.1$

$= 20 \times (-1) = -20$

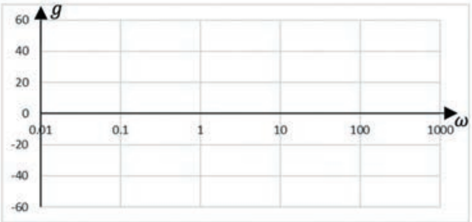
(2) $g = 20\log_{10} 10$

$= 20 \times 1 = 20$

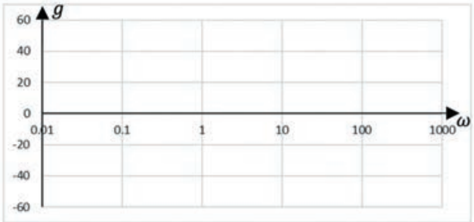


1.　次のゲイン特性をボード線図に表せ。

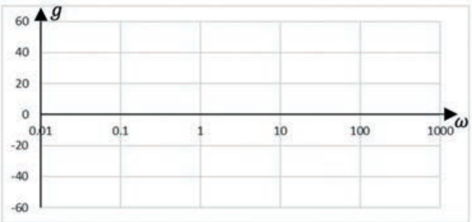
(1)　$g = 20\log_{10} 100$



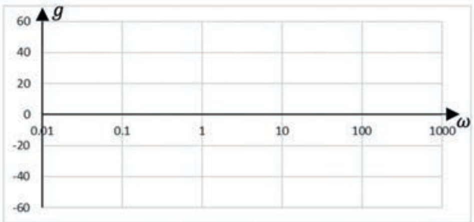
(2)　$g = 20\log_{10} 1000$



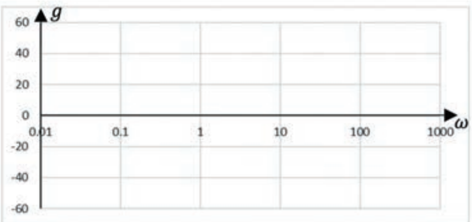
(3)　$g = 20\log_{10} 0.1$



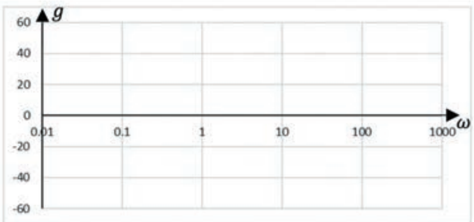
(4)　$g = 20\log_{10} 0.001$



(5)　$g = 20\log_{10} 0.01$



(6)　$g = 20\log_{10} 1$



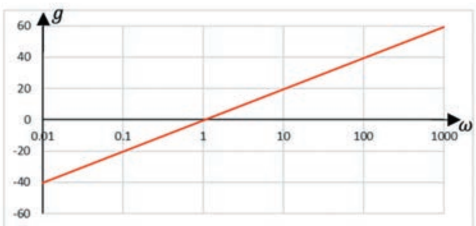
微分要素

微分要素は $\boldsymbol{g = 20\log_{10}\omega T}$ の形で表され、ゲイン g が ω に比例して増加する要素のこと。

ボード線図は**右上がりの直線となる。**

例えば $T = 1$ の $g = 20\log_{10}\omega$ の場合、下図のようなグラフになる。

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]	-40	-20	0	20	40	60



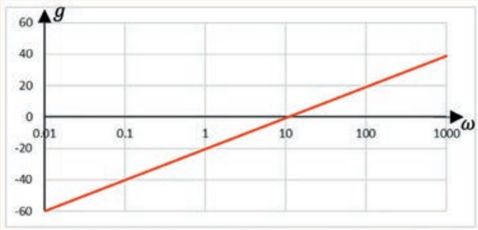
※ ωT の部分が 1 になるときに g が 0 になることを覚えておくと良い。

例題

次のゲイン特性をボード線図に表せ。

(1) $g = 20\log_{10} 0.1\omega$　　$\boxed{\omega = 10 \text{ で } g = 0 \text{ となる}}$

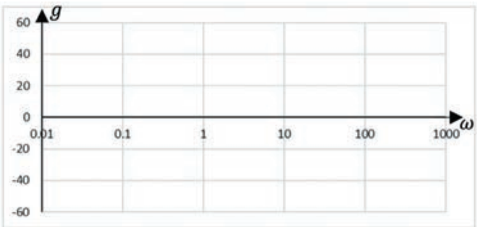
ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]	-60	-40	-20	0	20	40



2.　次のゲイン特性をボード線図に表せ。

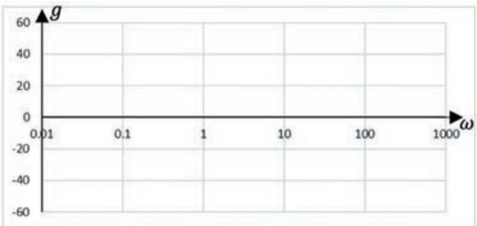
(1) $g = 20\log_{10} 10\omega$

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]						



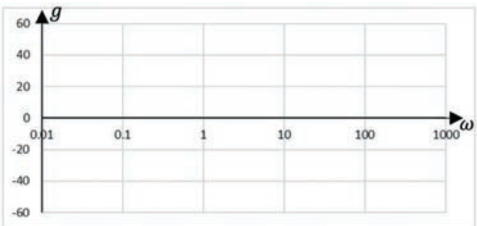
(2) $g = 20\log_{10} 0.01\omega$

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]						



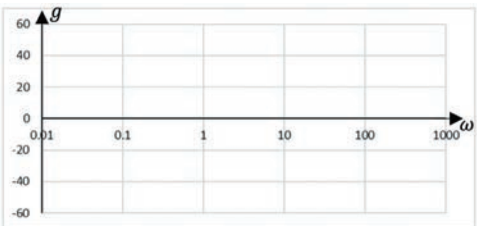
(3) $g = 20\log_{10} 100\omega$

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]						



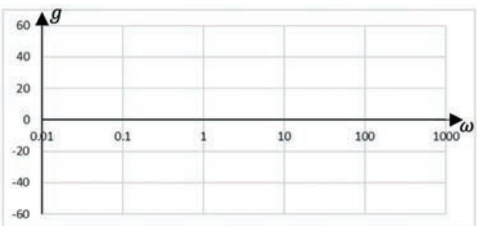
(4) $g = 20\log_{10} 1000\omega$

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]						



(5) $g = 20\log_{10}\omega$

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]						



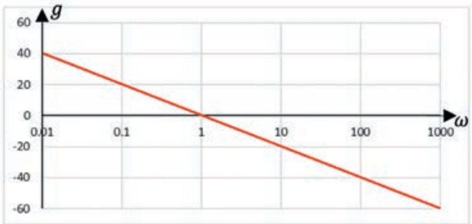
積分要素

積分要素は $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\omega T} = -20\log_{10}\omega T$ で表され、（商の対数公式を使用）

ゲイン g が ω に比例して減少する要素のこと。 ボード線図は**右下がりの直線となる。**

例えば $T = 1$ の $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\omega}$ の場合、下図のようなグラフになる。

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]	40	20	0	-20	-40	-60



※ ωT の部分が 1 になるときにゲインが 0 になることを覚えておくと良い。

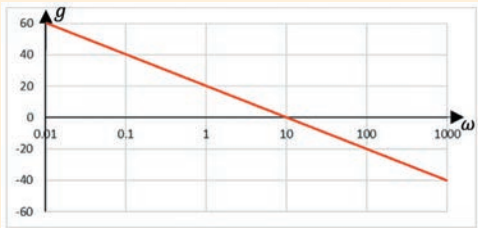
例題

次のゲイン特性をボード線図に表せ。

(1) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{0.1\omega}$

$\omega = 10$ で $g = 0$ となる

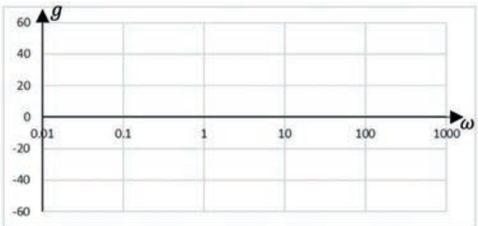
ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]	60	40	20	0	-20	-40



3. 次のゲイン特性をボード線図に表せ。

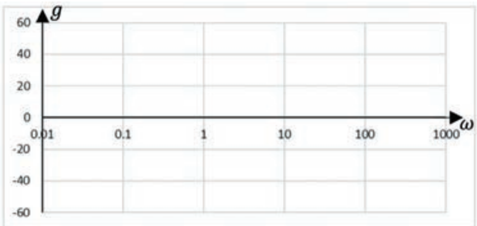
(1) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{10\omega}$

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]						



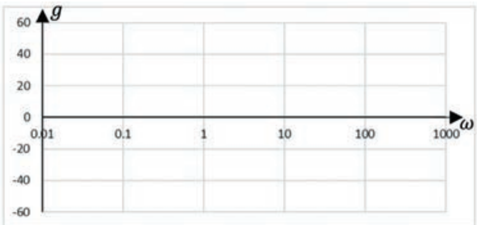
(2) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{0.01\omega}$

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]						



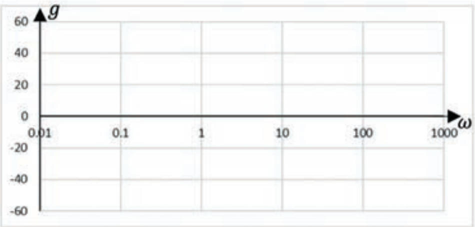
(3) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{100\omega}$

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]						



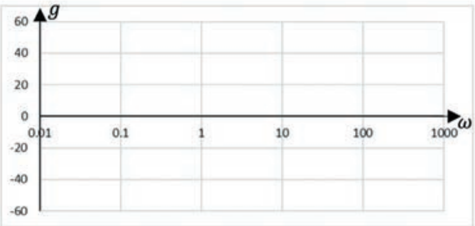
(4) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{1000\omega}$

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]						



(5) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\omega}$

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]						



一次進み要素

一次進み要素は $\boldsymbol{g = 20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}}$ の形で表され、

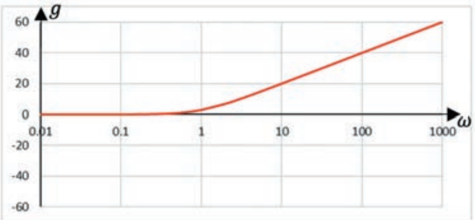
ゲイン g が ω に比例して急に増加する要素のこと。

ボード線図はある地点から傾きが徐々に変化し、**右上がりの直線となる。**

例えば $T = 1$ の $g = 20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2}$ の場合、下のような表とグラフになる。

ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]	0.00043	0.04321	3.0103	20.0432	40.0004	60

$20\log_{10}\sqrt{2}$ が約 3 になることだけは覚えておこう。

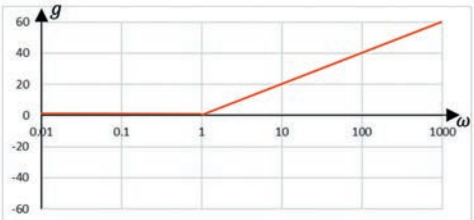


上の表の数値から何となく分かるかもしれないが、これは手計算できないうえ、

曲線部分を正確に書くことは困難なので、

$\boldsymbol{\omega^2T^2}$ の部分が 1 になる ω のタイミングで線が折れる**折れ線近似**（下図）を用いて

ボード線図を書く問題が電験二種で出題される。



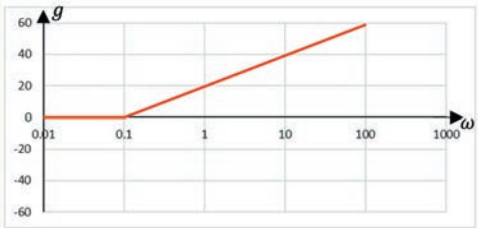
※ $\omega^2T^2 = 1$ となるまでは $g = 0$ として扱い、その後は 20 ずつ上がるように書くのがポイント。

例題

次のゲイン特性を折れ線近似でボード線図に表せ。

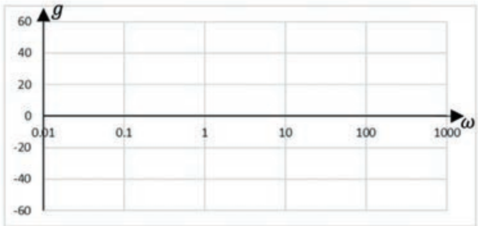
(1) $g = 20\log_{10}\sqrt{1 + 100\omega^2}$

$\omega = 0.1$ が線が折れるタイミングとなる。

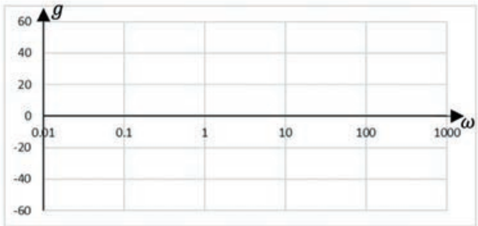


4. 次のゲイン特性を折れ線近似でボード線図に表せ。

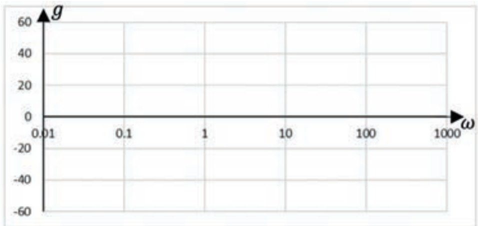
(1) $g = 20\log_{10}\sqrt{1 + 0.01\omega^2}$



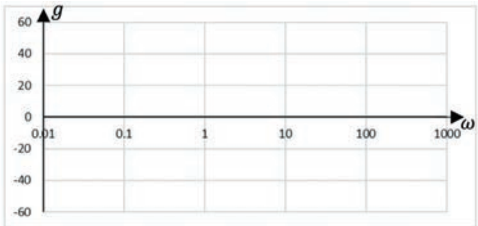
(2) $g = 20\log_{10}\sqrt{1 + 10000\omega^2}$



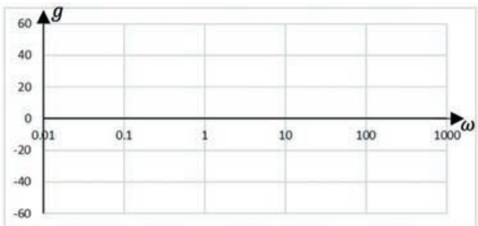
(3) $g = 20\log_{10}\sqrt{1 + 0.0001\omega^2}$



(4) $g = 20\log_{10}\sqrt{1 + \omega^2}$



★(5) $g = 20\log_{10}\sqrt{1 + 0.04\omega^2}$



一次遅れ要素

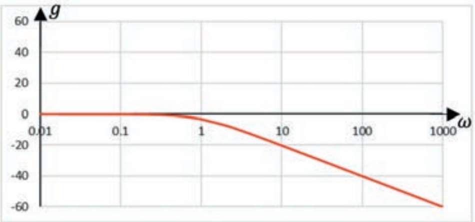
一次遅れ要素は $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} = -20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}$ の形で表され、ゲイン g が ω に比例して急に減少する要素のこと。

ボード線図はある地点から傾きが徐々に変化し、**右下がりの直線となる。**

例えば $T=1$ の $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ の場合、下図のような表、グラフになる。

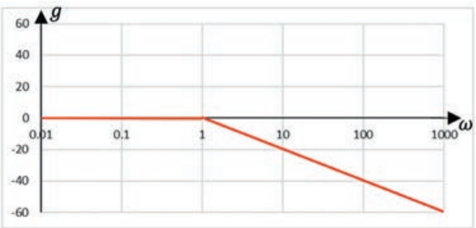
ω[rad/s]	0.01	0.1	1	10	100	1000
g[dB]	-0.00043	-0.04321	-3.0103	-20.0432	-40.0004	-60

$20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が約 -3 になることだけは覚えておこう。



一次進み要素と同じように、ω^2T^2 の部分が 1 になる ω のタイミングで線が折れる

折れ線近似（下図）を用いることが多い。



※ $\omega^2T^2=1$ となるまでは $g=0$ として扱い、その後は 20 ずつ下がるように書くのがポイント。

例題

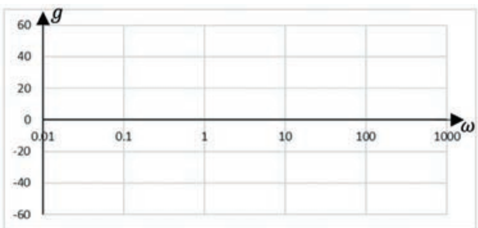
次のゲイン特性を折れ線近似でボード線図に表せ。

(1)　$g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{1+100\omega^2}}$

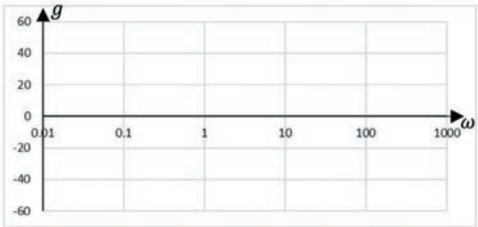
$\omega = 0.1$ が線が折れるタイミングとなる。

5.　次のゲイン特性を折れ線近似でボード線図に表せ。

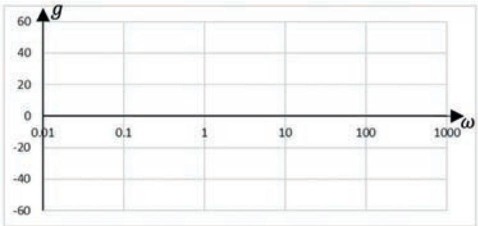
(1)　$g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{1+0.01\omega^2}}$



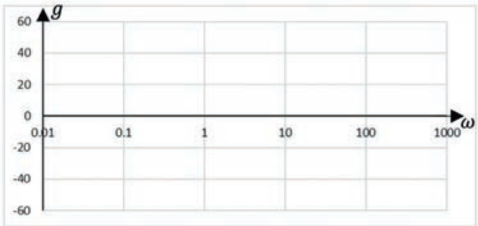
(2) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{1+10000\omega^2}}$



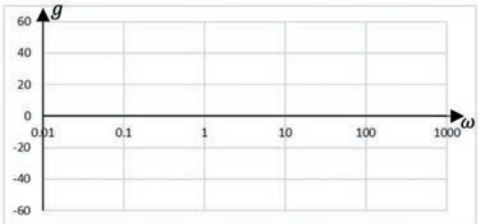
(3) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{1+0.0001\omega^2}}$



(4) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$



★(5) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{1+0.04\omega^2}}$



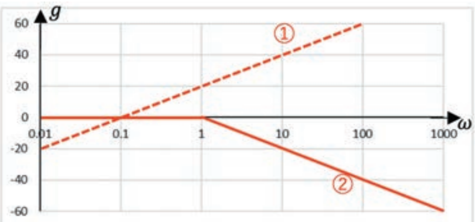
要素の合成

これまで学んできた要素をいくつか含んだゲイン特性を書くときは、それぞれの要素ごとのグラフを書き、合成するとよい。

例えば $g = 20\log_{10}\dfrac{10\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$ の場合、商の対数公式（P.9 参照）を使って

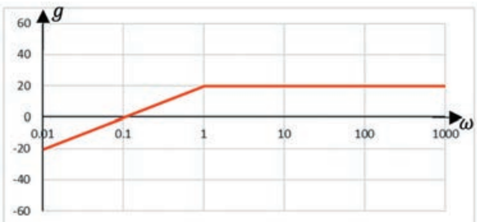
$g = \underbrace{20\log_{10}10\omega}_{①微分要素} - \underbrace{20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2}}_{②一次遅れ要素}$ という風に、2 つの要素に分解できる。

これをボード線図に表すときは、①と②のグラフを書き、①と②のグラフを合成すればよい。



合成後 -20 合成後 0 合成後 ＋20 合成後 ＋20 合成後 ＋20 合成後 ＋20

合成



例題

次のゲイン特性を折れ線近似でボード線図に表せ。

(1) $g = 20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{100+\omega^2}}$

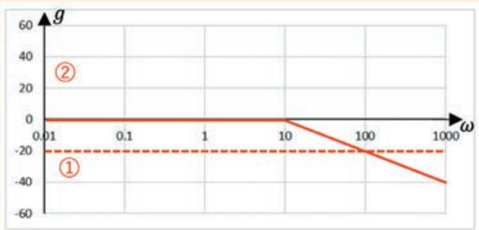
$= 20\log_{10}\dfrac{1}{10\sqrt{1+0.01\omega^2}}$

$= -20\log_{10}10\sqrt{1+0.01\omega^2}$

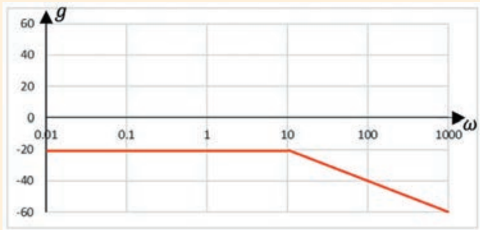
$= \underbrace{-20\log_{10}10}_{①比例要素}\underbrace{-20\log_{10}\sqrt{1+0.01\omega^2}}_{②一次遅れ要素}$

√の中身は1＋〇の形にする。

商の対数公式を使うが、20 $\log_{10}$ 1は0なので省略。

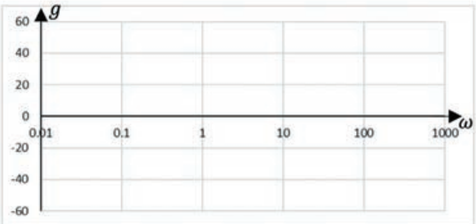


合成

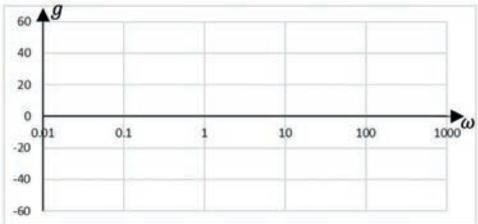


6. 次のゲイン特性を折れ線近似でボード線図に表せ。

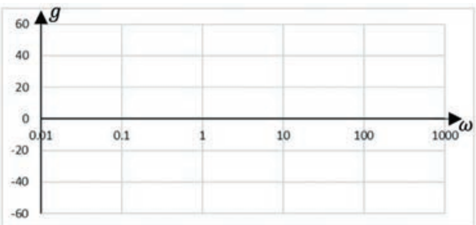
(1) $g = 20\log_{10}\dfrac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+0.01\omega^2}}$



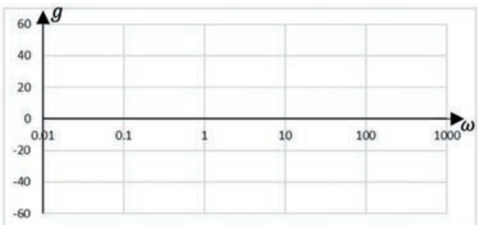
合成



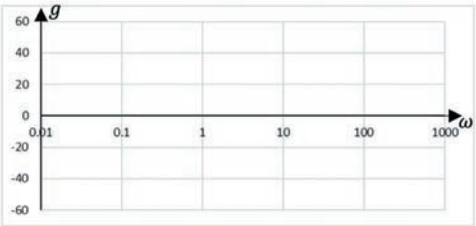
(2) $g = 20\log_{10}\dfrac{\sqrt{100+\omega^2}}{\omega}$



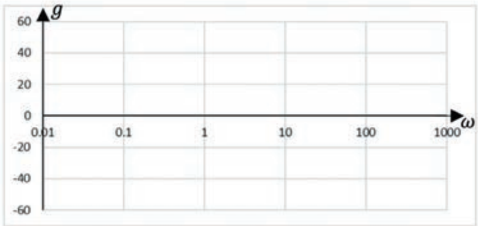
合成



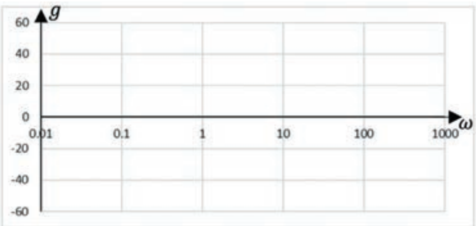
(3)　$g = 20\log_{10}\dfrac{\sqrt{100+\omega^2}}{100}$



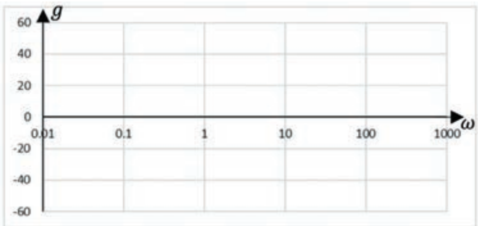
合成



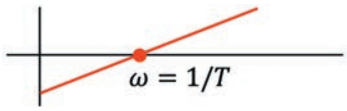
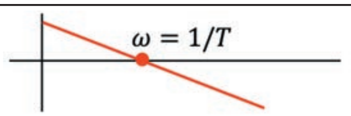
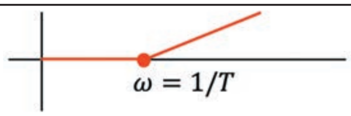
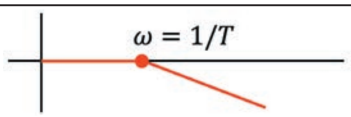
(4)　$g = 20\log_{10}\dfrac{\omega\sqrt{100+\omega^2}}{\sqrt{1+\omega^2}}$



合成



まとめ

要素名	式の形	グラフの形
比例要素	$20\log_{10}K$　※ K は定数	
微分要素	$20\log_{10}\omega T$	
積分要素	$20\log_{10}\dfrac{1}{\omega T} = -20\log_{10}\omega T$	
一次進み要素	$20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}$	
一次遅れ要素	$20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} = -20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}$	

04 微分

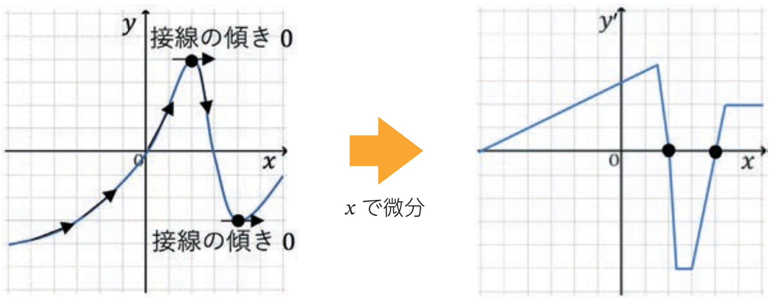
微分

x に関する関数 $y=f(x)$ があって、この関数の**導関数**（どうかんすう）を求めることを**微分**（びぶん）するという。

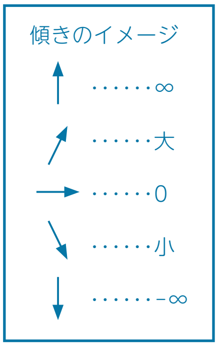
導関数は元の関数の各点における接線の傾きを関数化したものである。

y を x で微分したものは y' もしくは $\dfrac{dy}{dx}$ と表される。

y' は何の変数で微分したのかの情報が無く、流れから判断する必要がある一方、$\dfrac{dy}{dx}$ は x で微分したことが分かる。どちらもよく使われるので覚えておこう。



微分すると接線の傾きのグラフになる。



※以降は注意書きがない限り、全て x で微分しているとして進めていく。

微分の基本公式

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$ ※ただし r は有理数

例題

次の関数を x で微分せよ。

(1) $y=5x^3$

$y'=5\times 3x^{(3-1)}$

$=15x^2$ …………(答)

(2) $y=-\dfrac{4}{x^2}$

$=-4x^{-2}$

$y'=-4\times(-2)\times x^{(-2-1)}$

$=8x^{-3}$

$=\dfrac{8}{x^3}$ …………(答)

(3) $y=3\sqrt{x}$

$=3\times x^{\frac{1}{2}}$

$y'=3\times\dfrac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)}$

$=\dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ …………(答)

(4) $y=2x^3-4x^2+8$

$y'=2\times 3x^{(3-1)}-4\times 2x^{(2-1)}$

$=6x^2-8x$ …………(答)

※多項式の場合は各項ごとに微分する。
※第 3 項の 8 のような x に関係していない部分は、微分すると 0 になる。

1.　次の関数を x で微分せよ。

(1)　$y=-8x$

(2)　$y=-12$

(3)　$y=-\dfrac{1}{x}$

(4)　$y=\dfrac{1}{2x^2}$

(5)　$y=-\sqrt{x}$

(6)　$y=\dfrac{2}{x^3}$

(7)　$y=x^3-7x^2+5x+2$

(8)　$y=-2x^5+10x^3+5x^3-7$

(9)　$y=\sqrt{3x}+\dfrac{1}{x}$

(10)　$y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{4}$

(11)　$y=(x-5)^2$

(12)　$y=x^2(x^3+3x)$

三角関数の微分

$$(\sin ax)' = a\cos ax$$

$$(\cos ax)' = -a\sin ax$$

※ただし a は定数

例題

次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = \sin 5x$

$y' = 5\cos 5x$ ....(答)

(2) $y = -3\cos 4x$

$y' = -(-3) \times 4\sin 4x$

$= 12\sin 4x$ ....(答)

ax の部分を x で微分したものが前につくイメージをもっておこう。

2. 次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = \sin x$

(2) $y = \cos x$

(3) $y = \sin 3x$

(4) $y = \cos 8x$

(5) $y = -\sin x$

(6) $y = -\cos x$

(7) $y = -\sin 9x$

(8) $y = -\cos 2x$

(9) $y = 5\sin 5x$

(10) $y = 6\cos 6x$

(11) $y = \dfrac{2\sin 6x}{3}$

(12) $y = \dfrac{5\cos 8x}{6}$

指数関数の微分

ネイピア数 e = 2.718... を用いた関数 $\mathbf{e}^x$ は x で微分しても元の関数と変わらない性質がある。

$$(\mathbf{e}^x)' = \mathbf{e}^x$$

$$(\mathbf{e}^{ax})' = a\mathbf{e}^{ax}$$

※ただし a は定数

※ e^x を $\exp(x)$ と表記することもあるが、本書では e^x を使用する。

例題

次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = e^{5x}$

$y' = 5e^{5x}$ …………(答)

(2) $y = -3e^{2x}$

$y' = -3 \times 2e^{2x})$ …………(答)

3.　次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = e^{-x}$

(2) $y = e^{8x}$

(3) $y = -2e^{-3x}$

(4) $y = 7e^{x}$

(5) $y = -5e$

(6) $y = 7e^{7x}$

対数関数の微分

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}, \ \{\log_e(-x)\}' = \frac{1}{x}$$

※ $\log_e x$ を $\ln x$ と表すこともある。

例題

次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = \log_e 5x$

$= \log_e 5 + \log_e x$

$y' = \dfrac{1}{x}$ …………(答)

$\log_e 5$ は x の関数ではないので
x で微分すると 0 になる。

(2) $y = \log_e \dfrac{3}{x}$

$= \log_e 3 - \log_e x$

$y' = -\dfrac{1}{x}$ …………(答)

4.　次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = -3\log_e 4x$

(2) $y = \log_e(-5x)$

04. 微分

積の微分

2 つの x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ があるとき

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成立する。

※前を微分したものと後ろを微分したものを足すだけで OK

例題

次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = x^2\sin 8x$

$y' = (x^2)'\sin 8x + x^2(\sin 8x)'$

$= 2x\sin 8x + 8x^2\cos 8x$ …………(答)

(2) $y = x^2 e^{4x}$

$y' = (x^2)'e^{4x} + x^2(e^{4x})'$

$= 2xe^{4x} + 4x^2e^{4x}$ …………(答)

5.　次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = x\cos x$

(2) $y = x^2\sin x^3$

(3) $y = \dfrac{1}{x}\sin x$

(4) $y = \dfrac{1}{x}\cos 5x$

(5) $y = xe^{2x}$

(6) $y = 5x^2e^{3x}$

(7) $y = x - xe^{4x}$

(8) $y = \sin x\cos x$

(9) $y = x\log_e x$

(10) $y = e^{2x}\log_e x$

ほぼ使うことはないが、3 つ以上の積の場合は以下の公式が使えることを頭の片隅にいれておくとよい。

$$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

商の微分

2 つの x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ があるとき、

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

が成立する。

※積の微分とは違い第 2 項の符号が－なので注意。
※計算順序としては、分子を先に微分することを覚えておこう。

例題

次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = \dfrac{x}{x^2 + 3}$

$$y' = \frac{x'(x^2+3) - x(x^2+3)'}{(x2+3)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 3 - 2x^2}{x^4 + 6x^2 + 9}$$

$$= \frac{-x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 + 9}$$ …………(答)

(2) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

$$y' = \frac{(x-2)'(x+2) - (x-2)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x + 2 - (x-2)}{x^2 + 4x + 4}$$

$$= \frac{4}{x^2 + 4x + 4}$$ …………(答)

6.　次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = \dfrac{3x}{x^3 + 6}$

(2) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

(3) $y = \dfrac{4x - 3}{2x + 1}$

(4) $y = \tan x$

合成関数の微分

ここまで、y を x で微分した y' 、すなわち $\dfrac{dy}{dx}$ を求めてきた。

複雑な関数を微分するとき、x の関数を別の文字 (例えば A) に置き換えて、

y を A で微分した $\dfrac{dy}{dA}$ と A を x で微分した $\dfrac{dA}{dx}$ を求め、それらの積で $\dfrac{dy}{dx}$ を求めることができる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dA} \times \frac{dA}{dx}$$

例題

次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = (x+3)^4$

$\boxed{A = x + 3 \text{ とする。}}$

$$y = A^4$$

$$\frac{dy}{dA} = (A^4)' = 4A^3$$

$$\frac{dA}{dx} = (x+3)' = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dA} \times \frac{dA}{dx}$$

$$= 4A^3 \times 1$$

$\boxed{\text{() の展開はしなくて OK}}$

$$= 4(x+3)^3$$ …………(答)

(2) $y = \sin^3 x$

$\boxed{A = \sin x \text{ とする。}}$

$$y = A^3$$

$$\frac{dy}{dA} = (A^3)' = 3A^2$$

$$\frac{dA}{dx} = (\sin x)' = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dA} \times \frac{dA}{dx}$$

$$= 3A^2 \times \cos x$$

$$= 3\sin^2 x \ \cos x$$ …………(答)

7. 次の関数を x で微分せよ。

(1) $y = (2x-4)^5$

(2) $y = \sqrt{x^2 + 5}$

(3) $y = \sin(x^4 + 3)$

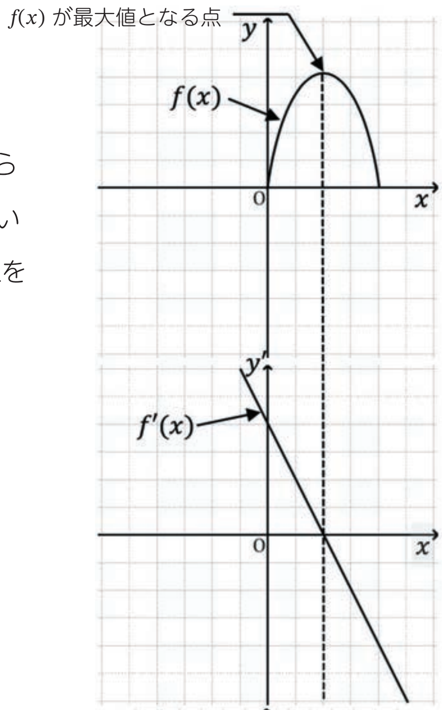
(4) $y = (x^2 - 2x + 3)^3$

微分の応用

微分は $e = -L\dfrac{di}{dt}$ や $i = \dfrac{dq}{dt}$ のような物理公式への適用の他に、**関数の最大値や最小値を求めるため**にも使われる。

右図のように $f'(x) = 0$ となるような x の値のとき、

$f(x)$ が最大もしくは最小となる。



また、最大か最小かの判断は $f(x)$ もしくは $f'(x)$ 前後の値から判断できるが、電験二種ではそこまでの数学力を要求されないので、関数を微分して 0 になるときが最大 or 最小ということを覚えておくとよい。※ 1

例：$R(R-4)$ が最小となる R の値を求めよ。

$y = R(R-4)$ とする。

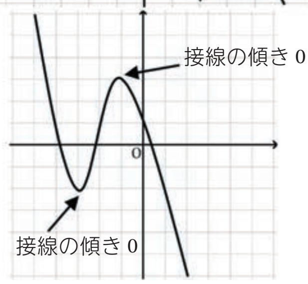
$$y = R^2 - 4R$$

$$\frac{dy}{dR} = 2R - 4$$

$2R-4 = 0$ のとき $R(R-4)$ が最小となるので、

$$2R = 4$$

$R = 2$ のときに $R(R-4)$ が最小となる。



※ **1** 実際は右図のように接線の傾きが 0 であっても最大・最小とは限らない関数があるが、電験二種では稀なのであまり気にしなくてよい。

例題

次の問いに答えよ。

(1) $y = (x+4)(9-x)$

が最大となる x を求めよ。

$$y = 9x - x^2 + 36 - 4x$$
$$= -x^2 + 5x + 36$$
$$y' = -2x + 5 = 0$$
$$-2x = -5$$
$$x = 2.5 \text{ または } \frac{5}{2}$$ …………(答)

(2) $E_0 = \dfrac{r_2 V}{(r_2 - r_1) r_1}$

が最小となる r_1 を求めよ。

※ただし、r_1 以外は全て定数とする。

r_1 は分母にしかないので、分母が最大となるように考える。

$y = (r_2 - r_1) r_1$ とする。

$$= r_1 r_2 - r_1^2$$
$$\frac{dy}{dr_1} = r_2 - 2r_1 = 0$$
$$-2r_1 = -r_2$$
$$r_1 = \frac{r_2}{2}$$ …………(答)

8.　次の問いに答えよ。

(1) $y = 2x^2 - 5x - 5$

が最小となる x を求めよ。

(2) $y = \dfrac{4}{x} + x$

が最小となる x を求めよ。

※ただし、$x > 0$ とする。

(3) $y = \sqrt{12x} - x$

が最小となる x を求めよ。

※ただし、$x > 0$ とする。

(4) $P_C = \omega_s T_m s (1-s)^2$

が最大となる s を求めよ。

※ただし、s 以外は全て定数とする。

(5) $\eta = \dfrac{\alpha P_n \cos\theta}{\alpha P_n \cos\theta + P_i + \alpha^2 P_c}$

が最大となる α を求めよ。

※ただし、α 以外は全て定数とし、
$\alpha > 0$ とする。

★(6) $A = s\left\{\left(r_1 + \dfrac{r_2}{s}\right)^2 + (x_1 + x_2)^2\right\}$

が最小となる s を求めよ。

※ただし、s 以外は全て定数とし、
$s > 0$ とする。

★(7) $E_r = \dfrac{V}{r \log_e \dfrac{R}{r}}$

が最小となる r を求めよ。

※ただし、r 以外は全て定数とする。

05 積分

積分

微分と逆の操作をすることを**積分する**（せきぶん）という。

例えば、$f(x)=2x$ を x で積分した関数を $F(x)$ として、これを数式で表すと

$$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int 2x\,dx$$
$$=x^2+C$$ ※ただし C は定数

x で微分して $2x$ になる関数は x^2 だけでなく、x^2+3 や x^2+5 もあり、このように微分して 0 になる部分をまとめて C（積分定数）を使って表す。

また $\int$ はインテグラルと呼び、$\int dx$ は x で積分していることを表す。

積分の基本公式

$$\int \boldsymbol{x^r\,dx=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C}$$ ※ただし $r\neq-1$

例題

次の計算をせよ。

(1) $\int 7x^3\,dx$

$=7\int x^3\,dx$

$=7\times\frac{1}{3+1}x^{(3+1)}+C$

$=\frac{7}{4}x^4+C$ …………(答)

※文字の前の係数は $\int$ の外に出しても OK。

(2) $\int -\frac{4}{x^2}\,dx$

$=-4\int x^{-2}\,dx$

$=-4\times\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=\frac{4}{x}+C$ …………(答)

(3) $\int 3\sqrt{x}\,dx$

$=3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=3\times\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{(\frac{1}{2}+1)}+C$

$=3\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$=2\sqrt{x^3}+C$ …………(答)

(4) $\int(2x^3-4x^2+8)dx$

$=\frac{2}{3+1}x^{(3+1)}-\frac{4}{2+1}x^{(2+1)}+8x+C$

$=\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3+8x+C$ …………(答)

※多項式の場合は各項ごとに積分する。
※ 8 のような定数項は x で積分すると x がつく。

1．　次の計算をせよ。

(1) $\int 8x\,dx$

(2) $\int 3x^2\,dx$

(3) $\int 6x^3\,dx$

(4) $\int 2\,dx$

(5) $\int \frac{4}{x^2}dx$

(6) $-\int \frac{1}{2x^3}\,dx$

(7) $\int 2\sqrt{x}\,dx$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

(9) $\int (2x^2-5x+3)\,dx$

(10) $\int \left(x^3-x+\frac{1}{x^2}\right)dx$

05. 積分

$\dfrac{1}{x}$ の積分

$\log_e x$ を x で微分すると $\dfrac{1}{x}$ となるので、以下の公式が成立する。

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log_e|x| + C$$

$|x|$ の部分は絶対値を示しているが、電験二種では気にしなくて OK。

例題

次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{5}{x}\,dx$

$\displaystyle= 5\int \frac{1}{x}\,dx$

$= 5\log_e x + C$ …………(答)

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{3x}\,dx$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\log_e x + C$ …………(答)

2.　次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{8x}\,dx$

(3) $\displaystyle-\int \frac{5}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$

三角関数の積分

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

※ただし a は定数

例題

次の計算をせよ。

(1) $\int \sin 5x\, dx$

$= -\frac{1}{5}\cos 5x + C$ …………(答)

(2) $\int 3\cos 4x\, dx$

$= \frac{3}{4}\sin 4x + C$ …………(答)

ax の部分を x で微分したものの逆数 $\frac{1}{a}$ が前につくイメージをもっておこう。

3.　次の計算をせよ。

(1) $\int \sin x\, dx$

(2) $\int \cos x\, dx$

(3) $\int \sin 2x\, dx$

(4) $\int \cos 4x\, dx$

(5) $-\int \sin x\, dx$

(6) $-\int \cos x\, dx$

(7) $\int 6\sin 8x\, dx$

(8) $\int 9\cos 3x\, dx$

(9) $\int \frac{\sin 2x}{3}\, dx$

(10) $\int \frac{3\cos 6x}{2}\, dx$

指数関数の積分

関数 e^x は x で微分しても元の関数と変わらないので積分しても元の関数と変わらない。

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

※ただし a は定数

例題

次の計算をせよ。

(1) $\int e^{5x}\,dx$

$= \frac{1}{5}e^{5x} + C$ …………(答)

(2) $\int 3e^{2x}\,dx$

$= \frac{3}{2}e^{2x} + C$ …………(答)

4.　次の計算をせよ。

(1) $\int e^x\,dx$

(2) $\int e^{2x}\,dx$

(3) $\int e^{4x}\,dx$

(4) $\int \frac{1}{2}e^{5x}\,dx$

(5) $\int 8e^{4x}\,dx$

(6) $\int \frac{6}{5}e^{8x}\,dx$

(7) $\int 3e^{-2x}\,dx$

(8) $\int \frac{3}{7}e^{-3x}\,dx$

部分積分

2 つの x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ があるとき、以下の公式が成立する。

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

この公式は 4 章の積の微分の公式から以下のように導くこともできる。

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

両辺を x で積分

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

移項

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

x の表記がたくさんあってややこしいので、 $\int f'g = fg - \int fg'$ と覚えてもよい。

左辺の $f'(x)$ と $g(x)$ にどちらの関数をあてはめるのかが重要なポイントとなるが、

$g(x)$ の部分に、「微分して x の関数でなくなる方」をあてはめるとうまくいくことが多い。

例題

次の計算をせよ。

(1) $\int \underline{x}\underline{e^x}\,dx$

$f' = e^x$ を積分、$g = x$ を微分して求める

$f' = e^x,\ g = x$ とすると、$\boxed{f = e^x,\ g' = 1}$

$= fg - \int fg'\,dx$

$= xe^x - \int (e^x \times 1)dx$

$= xe^x - e^x + C$ …………(答)

(2) $\int x \sin x\,dx$

$f' = \sin x,\ g = x$ とすると、

$f = -\cos x,\ g' = 1$

$= -x\cos x - \int -\cos x\,dx$

$= -x\cos x - (-\sin x) + C$

$= -x\cos x + \sin x + C$ …………(答)

ちなみに例題 (2) で $f' = x,\ g = \sin x$ とすると、$f = \dfrac{1}{2}x^2,\ g' = \cos x$ となり、その後の流れは

$$\int x\sin x\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin x - \int \frac{1}{2}x^2\cos x\,dx$$

となり、右辺の第二項が計算できない。

(これを部分分数で計算する手もあるが、計算が永遠に終わらない)

よって、最初の f' と g の決定は慎重に決めよう。

大切なのは g の部分に、「微分して x の関数でなくなる方」をあてはめること。

5.　次の計算をせよ。

(1) $\int x\cos x\,dx$

(2) $\int xe^{-x}\,dx$

(3) $\int x\cos 5x\,dx$

(4) $\int (x+3)\sin 2x\,dx$

(5) $\int (x-5)e^{x}\,dx$

★(6) $\int x^2\sin x\,dx$

置換積分

ある積分がそのままの形で計算しにくい場合は、別の変数に置き換えて計算する**置換積分**を使う。

例題

次の計算をせよ。

(1) $\int \sqrt{3x+1}\,dx$

$A = 3x+1$ とおく。

$= \int \sqrt{A}\,dx$

$\frac{dA}{dx} = 3$ より

$dx = \frac{1}{3}dA$ なので

$= \int \sqrt{A} \times \frac{1}{3}dA$

$= \frac{1}{3}\int \sqrt{A}dA$

$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}A^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{9}\sqrt{A^3} + C$

変数の戻し忘れに注意！

$= \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + C$ …………(答)

別の変数に置き換えた後、2行目から3行目のように dx を dA に変換しなければならないことに注意。

(2) $\int x(x-4)^3\,dx$

$A = x-4$ とおくと

$x = A+4$

$= \int (A+4)A^3\,dx$

$\frac{dA}{dx} = 1$ より

$dx = dA$ なので

$= \int (A+4)A^3\,dA$

$= \int (A^4+4A^3)\,dA$

$= \frac{1}{5}A^5 + A^4 + C$

$= \frac{1}{5}(x-4)^5 + (x-4)^4 + C$ …………(答)

$x-4$ を A とした後、x も A を使った形に置き換えるのがポイント。

6.　次の計算をせよ。

(1) $\int \sqrt{5x+8}\,dx$

(2) $\int (4x-6)^4\,dx$

05. 積分

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{5x+3}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{x+3}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

★(6) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

定積分

右図のように x 軸と y 軸があって、

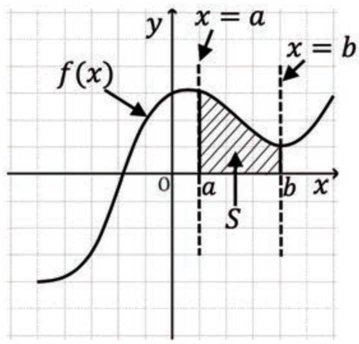
x 軸 , $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ で囲まれる面積 S は

次の式で表せる。

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

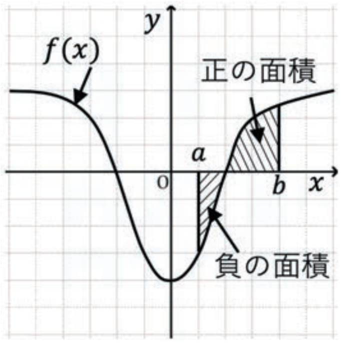
$f(x)$ を x で積分したものを $F(x)$ とすると上の式は

$$S = [F(x)]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$



という風に計算ができる。(このとき、引き算によって積分定数 C が相殺されることに注意)

このように、積分する範囲を指定した積分を**定積分**とよび、範囲を指定しない積分は**不定積分**とよぶ。また、下図のように、x 軸より上の部分の面積は正、下の部分の面積は負として扱う。



(例えば、$y = \sin x$ を 0 から 2π の範囲で x で積分すると 0 となる)

例題

次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{3} 4x^2\,dx$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3\right]_{-2}^{3}$$

係数を外に出した方が計算が楽になる。

$$= \frac{4}{3}\,[x^3]_{-2}^{3}$$

x に 3 を代入したものから -2 を代入したものを引く。

$$= \frac{4}{3}\,\{3^3 - (-2)^3\}$$
$$= \frac{4}{3}\,(27 + 8)$$
$$= \frac{140}{3}$$ …………(答)

(2) $\displaystyle\int_r^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= \int_r^{\infty} x^{-2}\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_r^{\infty}$$
$$= -\left[\frac{1}{x}\right]_r^{\infty}$$

x に ∞ を代入したものから r を代入したものを引く。

$$= -\left\{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right\}$$

$\frac{1}{\infty} = 0$

$$= -\left\{-\frac{1}{r}\right\}$$
$$= \frac{1}{r}$$ …………(答)

7.　次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_0^3 5x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^3\,dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{e}^{2x}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{x^2}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta$

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$

8.　次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_{r}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\, dx$

※ x 以外は全て定数とする。

(2) $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}\, dr$

※ r 以外は全て定数とする。

(3) $\displaystyle\int_{0}^{a} \frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi a^4}\, dr$

※ r 以外は全て定数とする。

★(4) $\displaystyle\int_{r}^{d-r} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}\right) dx$

※ x 以外は全て定数とする。
※ $d-r>0$ とする。

(5) $\displaystyle\int_0^L \left(I-\frac{I}{L}x\right) r\ dx$

※ x 以外は全て定数とする。

(6) $\displaystyle\int_0^L \left(I-\frac{I}{L}x\right)^2 r\ dx$

※ x 以外は全て定数とする。

(7) $\displaystyle\int_0^L \left(\frac{IL}{2}-\frac{I}{2L}x^2\right) r\ dx$

※ x 以外は全て定数とする。

(8) $\displaystyle\int_x^L \left(\frac{IL}{2}-\frac{I}{2L}x^2\right) r\ dx$

※ x 以外は全て定数とする。

定積分の部分積分

定積分の部分積分は以下の公式を使用する。

$$\int_a^b f'(x)g(\mathrm{x})dx = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$$

右辺の第一項にも積分範囲が入るので注意しよう。